SPAZI VETTORIALI

① Spazio vettoriale, concetto

Def: uno spazio vettoriale $\vec{V}$ è un insieme dotato di
- una operazione binaria somma "+", ovvero "$+ : V \times V \to V$" $(= \vec{v} + \vec{w})$
- prodotto per un numero, ovvero "$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$" $(= \alpha \vec{v} \in V)$
- tale che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(1) $\forall v, w \in V,\ v+w = w+v$
(2) $\forall v, w, u \in V,\ (v+w)+u = v+(w+u)$
(3) $\exists$ "0" $\in V$ / $\forall v \in V,\ \vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$
(4) $\forall v \in V,\ \exists (-v) / (v)+(-v) = 0$
(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall v \in V,\ (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
(6) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall v, w \in V,\ \alpha(w+v) = \alpha w + \alpha v$
(7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall v \in V,\ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
(8) $\forall v \in V\ \ 1 \cdot v = v\ ,\ \ 0 \cdot v = $"$0$"

Esempio. Chi è lo zero?

$V = \mathbb{R}$; "$\cdot$" è il solito prodotto tra reali

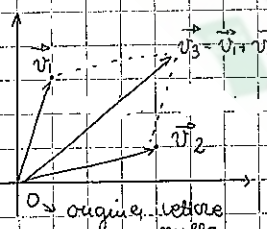
"$+$" $\quad x \textcircled{+} y = x + y + 1$ $\quad \textcircled{+}$ = operazione

$(\mathbb{R}, \textcircled{+}, \cdot)$ → Vediamo se è spazio vettoriale in base alla (3)

- $x \textcircled{+} y = x \to x + y + 1 = x \longrightarrow y = -1$ $\quad$ (3) $\exists 0 = V \mid \forall v \in V\ \ v + 0 = v$
- ma vediamo (8) che non vale $\quad 0x = y$
  $\quad 0 \neq 1$ $\quad$ conclusione: $(\mathbb{R}, \textcircled{+}, \cdot)$ non è uno spazio vettoriale

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Piano Cartesiano $= \mathbb{R}^2$



Ad ogni punto corrisponde uno e un solo vettore che parte dall'origine.

PROPRIETÀ (perché queste? Ci servono tutte!) — operazione: somma dei vettori

(1) Commutativa
(2) Associativa
(3) $\exists\ \vec{0} \mid$ "$\vec{0}$", $\vec{v} = \vec{v}$ *
(4) $\forall \vec{v}\ \exists\ -\vec{v} \mid \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (esiste un opposto)

moltiplicazione, grazie alla quale i vettori sono comprimibili o estendibili

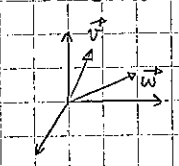
(5) $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ (α, β numeri)
(6) $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$
(7) $(\alpha\beta)\vec{v}_1 = \alpha(\beta\vec{v}_1) = (\alpha\vec{v}_1)\beta$
(8) $1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1$, $0 \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$ *

* $\vec{0} \neq 0$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

coordinate cartesiane

- $\mathbb{R}^3$ [Vale regola del parallelogramma, stesse operazioni e proprietà]



$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ file dimostro l'esistenza come sp vettoriale mediante alcune proprietà:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{pmatrix}$$

Sì, è uno spazio vettoriale.

- $\mathbb{R}^m$: $\mathbb{R}^m = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : x_1, x_2 \ldots x_m \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix}$, $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}$

È lo spazio vettoriale più importante di tutti!

N3: L'insieme di tutti i polinomi $(a+ax+ax^2...)$ denotato con $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale rispetto a "+", "·" e vedremo in seguito che è sostanzialmente diverso da $\mathbb{R}^n$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

2. Concetti preliminari per le Matrici

Es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ } m righe
(n colonne)

- ha taglia m×n
- ogni elem ha coefficiente di posto (i,j) (riga, colonna)
- si chiamano A, B, C
- $(A)_{ij}$ = coeff. della A al posto i,j - esimo
- Somma: solo se hanno stessa taglia ⇒ esito: matrice di stessa taglia e di coeff ij-esimi $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi+1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- Prodotto per λ: qualsiasi matrice per qualsiasi numero

es: $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 15 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

- Prodotto tra matrici: $AB = C$ possibile se A B , cioè # colonne A = # righe B
$m\times n$ $n\times k$

$(A\cdot B)_{ij}$ = riga ij esima di A) · (colonna ij esima B) — C ha taglia m×k

$(a_1\ a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 \dots + a_nb_n$

esempio① $[1\times 2]\ [2\times 2]\ [1\times 2]$

$(1\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 3)$

② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

NB Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme di tutte le matrici $m\times n$ $(= M_{m\times n}(\mathbb{R}))$ è uno spazio vettoriale rispetto alla somma e al prodotto per numeri

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

② PROPRIETÀ OPERAZIONI TRA MATRICI

somma, prodotto tra numero e matrici ;; ;; matrici

Osservazione preliminare:

a) Cosa vuol dire che 2 matrici sono uguali? $A = B$

→ La stessa taglia devono avere $(m \times n)$

→ $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1 \dots n$, $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ i coefficienti allo stesso posto.

$[= A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})]$

① PROPR. distributive Hp: (1) Sia A una matrice $m \times n$, siano B, C due matrici $m \times k$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; Allora $\boxed{A(\alpha B + \beta C) = \alpha \cdot AB + \beta \cdot AC}$

(2) Siano $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, sia $C \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{C(\alpha A + \beta B) = \alpha AC + CB\beta}$

Dimo (1) • Passo preliminare: scriveremo $(A)_{ij} = a_{ij}$, $(B)_{ij} = b_{ij}$, $(C)_{ij} = c_{ij}$

NOTA: notazione standard: $A = (a_{ij})_{m\times n}$

• Taglia: B, C hanno entrambe taglia $m \times k$ (quindi sono sommabili)

A ha taglia $m \times n$; quindi il prodotto è matrice $m \times k$

$$\underset{m\times n}{A}\left(\alpha \underbrace{B}_{n\times k} + \beta C\right) = \alpha \underbrace{AB}_{m\times k} + \beta \underbrace{BC}_{\text{"}}$$

• Coefficienti $T = A(\alpha\beta + \beta C)$, $S = \alpha BA + \beta AC$. Cosa vogliamo dimostr? che Coeff ij-esimo di T è = a coeff ij-esimo di S

cioè $(T)_{ij} = (S)_{ij}$ senza restrizioni su ij

«Conto diretto»: $(T)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} (A)_{ip} \cdot (\alpha B + C\beta)_{pj} = \sum_{p=1}^{n} (A)_{ip} \cdot (\alpha \cdot (B)_{pj} + \beta (C)_{pj})$

$= \alpha \underbrace{\sum_{p=1}^{n} (A)_{ip} \cdot (B)_{pj}}_{(AB)_{ij}} + \beta \underbrace{\sum_{p=1}^{n} (A)_{ip} \cdot (C)_{pj}}_{(AC)_{ij}} = \alpha (AB)_{ij} + \beta (AC)_{ij} = (S)_{ij} = (T)_{ij}$

$\forall i = 1 \dots m$, $\forall j = 1 \dots n$

c.v.d

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

② Il prodotto non è commutativo $A \times B \neq B \times A$

→ $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$ con $m \neq k$: $A \times B$ si può fare, $B \times A$ mai si può fare

→ $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$ con $m \neq n$ $\exists$ $A \times B$, $B \times A$, ma hanno taglie diverse ($A \times B$: $m \times m$; $B \times A$: $n \times n$)

→ $A_{m\times m}$, $B_{m\times m}$ $\exists$ $A \times B$, $B \times A$ ed hanno stessa taglia $n \times n$, ma quasi sempre $AB \neq BA$ (hanno almeno 1 punto diverso)